Préparer ma rentrée en Terminale

Option Maths complémentaires

Eté 2020

Introduction

En septembre, vous entrerez au lycée en terminale générale avec l'option mathématiques complémentaires. Vous aurez 3h de mathématiques par semaine. Le programme reprend toutes les notions vues en première, exceptée la géométrie, les approfondit et en développe de nouvelles, en les contextualisant à travers 9 thèmes d'étude.
Seules les notes du contrôle continu comptent pour l'obtention du baccalauréat. Des bases solides en mathématiques sont toutefois indispensables pour réussir dans l'Enseignement Supérieur dans beaucoup de domaines scientifiques ou économiques.

Votre professeur de mathématiques de terminale vous aidera à faire évoluer vos méthodes de travail pour acquérir plus d'autonomie et d'efficacité. Savoir s'imposer de comprendre et mémoriser les méthodes, de refaire les exercices chez soi après avoir assimilé le cours est une des clés de la réussite, à condition d'être particulièrement concentré et actif en classe.

Ce cahier a été élaboré par des professeurs du lycée Elie Faure de Lormont et du lycée Brémontier de Bordeaux. Il est fortement inspiré des travaux de l'IREM de Clermont Ferrand - Groupe Aurillac-Lycée et du livret de liaison du Lycée Louis Bascan (78).
Il s'agit d'un recueil de méthodes et outils portant sur l'ensemble du programme de première.
Il propose des exercices à traiter avant la rentrée pour envisager plus sereinement l'année de terminale, option mathématiques complémentaires.
Ce travail sera d'autant plus efficace si vous le faites avec sérieux et de manière autonome.
Votre professeur de mathématiques pourra vérifier dès la rentrée lors d'une évaluation diagnostique les contenus développés dans ce cahier.
Un livret de corrigés sera publié sur le site du lycée au cours de la dernière semaine du mois d'août.

Quelques conseils d'organisation :

- ☞ Echelonner votre travail sur une ou deux semaines (4 à 6 exercices par jour).
- ☞ S'assurer que l'on maîtrise le cours avant de faire les exercices en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet abordé.
- ☞ Faire attention au soin et à la rédaction.
- ☞ Si vous ne réussissez pas à faire un exercice, n'abandonnez pas, allez rouvrir votre cours de seconde pour y retrouver un exercice du même type.
- ☞ Les exercices signalés par des étoiles demandent un peu plus de recherche.

Bon courage à tous et bonnes vacances !

Les bases

1 Calcul numérique

Prérequis

- ✏ Règles de calculs sur les fractions et les puissances.
- ✏ Racine carrée d'un nombre réel positif et règles de calculs.

Exercice n° 1

Calculer sans calculatrice.

1. $A = \dfrac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}}$

2. $B = \dfrac{3^{-6} \times 5^5}{(5^2)^3 \times 3^{-5}}$.

Outils - Calculs avec des radicaux

☛ **Définition**

Pour tout réel positif a, $\sqrt{a}$ est le réel positif dont les carré est a.
Autrement dit, pour tout a positif, $\sqrt{a}^2 = a$.
Attention : pour tout a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

☛ **Produit**

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times c}$

☛ **Quotient**

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples - Opérations avec des radicaux

$A = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{56}}$

$A = \sqrt{\dfrac{14}{56}}$

$A = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$B = \sqrt{48} + \sqrt{12}$

$B = \sqrt{3 \times 4^2} + \sqrt{3 \times 2^2}$

$B = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$B = 6\sqrt{3}$

Exercice n° 2

Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

1. $C = \sqrt{48}$;

2. $D = \sqrt{36 + 64}$;

3. $E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$.

Utilisation de l'expression conjuguée

L'expression conjuguée de $3+\sqrt{5}$ est $3-\sqrt{5}$.
On utilise l'expression conjuguée pour écrire un quotient sans radical au dénominateur.

$$F=\frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

$$F=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$F=\frac{2\times\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$F=\frac{2\times\left(3-\sqrt{5}\right)}{3^2+\sqrt{5}^2}$$

$$F=\frac{2\times\left(3-\sqrt{5}\right)}{14}$$

$$F=\frac{2\times\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\times 7}$$

$$F=\frac{3-\sqrt{5}}{7}$$

Exercice n° 3

Ecrire sans radical au dénominateur et simplifier les expressions suivantes.

1. $H=\dfrac{-2}{\sqrt{7}-2}$; **2.** $I=\dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel. factoriser les expressions suivantes :

1. $A=-2\times(5)^{n+1}+2\times(5)^n$; **2.** $B=(n+1)\times 2^{n+1}-n\times 2^n$

Exercice n° 5

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $2^n+2^n=2^{n+1}$.

2 Calcul littéral

Prérequis

- ✏ Maîtriser les identités remarquables et les priorités de développements.
- ✏ Repérer ou mettre en évidence un facteur commun pour factoriser.
- ✏ Mettre en évidence a^2-b^2 pour factoriser.
- ✏ Réduire des expressions au même dénominateur.

Développer des expressions

Recopie et complète les pointillés.
$A=2(3x-1)^2-(5x+3)(2-3x)$

$A=2(\cdots x^2-\cdots+1)-(10x-\cdots+\cdots-\cdots)$

$A=18x^2-\cdots+1-10x+\cdots-\cdots+\cdots$ donc $A=\cdots$

Exercice n° 6

En utilisant la même méthode, développe $B=(2x-9)(3-2x)+5(2x+1)^2$.

Factoriser des expressions

Exemple 1 :

$A = 6x + 3 + 4(2x + 1)^2$

$A = 3(2x + 1) + 4(2x + 1)(2x + 1)$

$A = (2x + 1)\,(3 + 4(2x + 1))$

$A = (2x + 1)(3 + 8x + 4)$

donc $A = (2x + 1)(8x + 7)$

Exemple 2 :

$B = 36x^2 - (5x + 1)^2$

$B = (6x)^2 - (5x - 1)^2$

$B = ((6x) + (5x - 1))\,((6x) - (5x - 1))$

$B = (6x + 5x - 1)\,(6x - 5x + 1)$

donc $B = (11x - 1)(x + 1)$

Exercice n° 7

Factoriser les expressions suivantes :

$C = 2(5x - 1)^2 + 10x - 2\,;$ $E = (4x - 3)^2 - 25x^2.$

Réduire des expressions au même dénominateur.

Recopie et complète les pointillés.

$A = 4 + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{4 \times (\cdots + \cdots)}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{\cdots + \cdots}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$ donc $A = \dfrac{\cdots + \cdots}{x+2}$

Exercice n° 8

En utilisant la même méthode, écris sous la forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$B = \dfrac{2x}{3x - 1 - 5}$ $C = \dfrac{4}{2x+6} - \dfrac{3}{x-5}$

3 Equations

Prérequis

- ✏ Savoir développer et factoriser une expression.
- ✏ Connaître et savoir utiliser les identités remarquables.
- ✏ Résolution d'une équation du premier degré et d'une équation produit nul.
- ✏ Equations du second degré.

Outils

A la fin de votre année de première, vous savez résoudre quatres type d'équation.

- ☛ Les équations linéaires (C'est à dire qui ne comporte aucune puissance de x, ni de fraction comportant des termes en x au dénominateur), il suffit de développer, si besoin, chaque membre de l'équation et d'isoler les différents termes en x d'un même côté de l'égalité.
- ☛ Les équations polynomiales (C'est à dire qui comporte des puissances de x qu'il n'est pas possible « d'éliminer » celles-ci par un simple développement),

- l'expression est factorisable, on se ramène alors à la résolution d'une équation produit.
- l'expression est du second degré (factoriqable ou non).

☛ Les équations rationnelles (C'est à dire qui comporte des fractions comportant des x au dénominateur). Il conviendra tout d'abord de déterminer l'ensemble des valeurs interdites (celles qui donnent un ou des dénominateurs égaux à 0)
Puis, il faudra transformer l'écriture de manière à se ramener à l'égalité de deux fractions. On pourra alors utiliser la règle des produits en croix ou la mise au même dénominateur afin de se ramener à l'un des deux cas précédents.

Exemple - Résolution d'une équation linéaire

$$\frac{3}{4}(2x-3)+3x=5x-\frac{2}{3}(5-9x)$$

Développer et se ramener à :

$$-\frac{13}{2}x=-\frac{13}{12}$$

Montrer alors que $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Exemple - Résolution d'une équation produit

$$81x^2-16=(9x-4)(2x_3)$$

Reconnaître une identité remarquable, factoriser et se ramener à :

$$-(9x-4)(7x+7)=0$$

Montrer alors que $S=\left\{\frac{4}{9};-1\right\}$

Exemple - Résolution d'une équation rationnelle

$$x+1=\frac{9}{x+1}$$

Déterminer les éventuelles valeurs interdites et se ramener à :

$$(x+1)^2=9$$

Montrer alors que $S=\{2;-4\}$

Exercice n° 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x=x+16$;

2. $(-x-4)(-x+7)=0$;

3. $9(-3x-1)(6x-36)=0$;

4. $\dfrac{-3x-1}{8-5x}=0$;

5. $\dfrac{5-8x}{x-2}=3$.

Exercice n° 10

✷ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(5x-1)(x-9)-(x-9)(2x-1)=0$;

2. $(x-1)(2x-7)=4x^2-28x+49$;

3. $x+1=\dfrac{9}{x+1}$;

4. $\dfrac{3x-1}{x-5}=\dfrac{3x-4}{x}$.

Outils - Second degré

Pour tout polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ défini sur $\mathbb{R}$, on appelle discriminant, le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si le discriminant est négatif, le polynôme f n'admet pas de racine
- Si le discriminant est nul, le polynôme f admet une unique racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si le discriminant est positif, le polynôme f admet deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exercice n° 11

Résoudre les équations suivantes, puis factoriser lorsque c'est possible.

1. $6x^2 - 15x - 9 = 0$; **2.** $\dfrac{1}{8}x^2 + x + 2 = 0$; **3.** $x^2 + x + 1 = 0$.

4 Etude de signes et inéquations

Prérequis

- ✏ Savoir développer et factoriser une expression.
- ✏ Règle des signes pour un produit ou un quotient.
- ✏ Étudier le signe d'une fonction affine.
- ✏ Inéquations du second degré.

Outils

Comme pour les équations, on traite différemment les expressions linéaires, les expressions factorisées (ou factorisables), les expressions du second degré et les expressions rationnelles.

Inéquation du premier degré

Exemple - Résolution d'une inéquation du premier degré

$2x - 3 \leqslant 1$	$-5x - 4 \leqslant 6$
$2x \leqslant 4$	$-5x \leqslant 10$
$x \leqslant 2$ donc $S =]-\infty; 2]$	$x \geqslant -2$ donc $S = [-2; +\infty[$

Exercice n° 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $6x + 7 > 4x + 8$; **2.** $x + 1 \geqslant 9x + 25$.

Signe d'un produit

Exemple guidé - Etude du signe d'un produit

On veut étudier le signe dans $\mathbb{R}$ du produit $P(x) = (-2x-6)(x-5)$.
On cherche les valeurs qui annulent chaque facteur. On parle de racine d'une expression.

Racine de $-2x-6$:
$-2x-6=0 \iff \cdots$

Racine de $x-5$:
$x-5=0 \iff \cdots$

On étudie le signe de chaque facteur :

$\cdots \qquad \cdots$

On complète le tableau avec les signes qui conviennent.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
signe de $-2x-6$			0				
signe de $x-5$					0		
signe de $P(x)$			0		0		

On peut alors en déduire les solutions des inéquations $P(x) > 0$ ou $P(x) \leqslant 0$ ou tout autre inéquation.

Exercice n^o 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x-8)(-1-10x) \leqslant 0$;

2. $(3x+2)^2-(3x+2)(5x+1) \leqslant 0$.

Exercice n° 14

✷ On considère deux nombre réels x et y dont la somme est 20.
On souhaite que leur produit P soit supérieur ou égal à 91.

1. Exprimer y en fonction de x.

2. Démontrer que résoudre l'inéquation $P \geqslant 91$ revient à résoudre l'inéquation $(7-x)(13-x) \geqslant 0$.

3. Conclure.

Signe d'un quotient

Exemple guidé

On veut étudier le signe du quotient $Q(x) = \dfrac{3x+9}{x-2}$

Condition d'existence du quotient (autremlent dit recherche de la valeur interdite.

$Q(x)$ existe $\iff x-2 \neq 0 \iff x \neq \cdots$

On a déjà la racine de $x-2$, il nous faut la racine de $3x+9$.

$3x+9=0 \iff x=\cdots$

On détermine le signe de $3x+9$ et de $x-2$.

$\cdots$ $\cdots$

On complète le tableau avec les signes qui conviennent.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
signe de $3x+9$			0				
signe de $x-2$					0		
signe de $Q(x)$			0		||		

On peut alors en déduire les solutions des inéquations $Q(x) > 0$ ou $Q(x) \leqslant 0$ ou tout autre inéquation.

Exercice n° 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3}{2x-7} \leqslant 0\,;$ **2.** $5 + \dfrac{2}{x+3} \leqslant 0\,;$ **3.** $\dfrac{3}{2x-1} \geqslant \dfrac{2}{-3x+15}\,;$

Signe d'un polynôme du second degré

Exemple guidé

On veut étudier le signe du quotient $R(x) = 4x^2 + x - 3$

On calcule le discriminant : $\Delta = \cdots$.

Ici, Δ est positif et le signe du coefficient en x^2 est ... qui est positif.

On obtient le tableau avec les signes de signe.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
signe de $R(x)$			0				

On peut alors en déduire les solutions des inéquations $R(x) > 0$ ou $R(x) \leqslant 0$ ou tout autre inéquation.

Exercice n° 16

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 5x - 42 \geqslant 0\,;$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{2x+5} \leqslant 0$

analyse

5 Fonction exponentielle

Prérequis

- ✏ Fonction exponentielle.
- ✏ Calcul avec des puissances.
- ✏ Calcul littéral.

Outils

La fonction exponentielle est l'unique fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On note cette fonction $exp(x)$ ou encore e^x.
Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

- ☛ $e^x > 0$;
- ☛ $e^0 = 1$
- ☛ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- ☛ $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- ☛ $e^{nx} = (e^x)^n$, pout out $n \in \mathbb{Z}$;
- ☛ $e^{x+y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

Exercice nº 17

Simplifier les écritures suivantes :

$A(x) = e^{2x-1}e^{-x+1}$; $B(x) = \dfrac{e^{2-x}}{e^{1-2x}}$; $C(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$;

$D(x) = \dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$; $E(x) = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{-x}}$

Exercice nº 18

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 10e^x - 5xe^x$;
2. $B = e^{2x} - 4e^x$;
3. $C = 9e^{2x} - 6e^x + 1$;
4. $D = e^{2x} - 16$.

Outils

La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout a et b dans $\mathbb{R}$,

- ☛ $e^a = e^b \iff a = b$;
- ☛ $e^a < e^b \iff a < b$.

Exercice nº 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{-3x} = e^{x+1}$;
2. $e^{2x} \leqslant 1$;
3. $e^{-2x} = 0$;
4. $e^x > e$;
5. $e^{x^2} = e^{-5x+6}$;
6. $e^{-x} \leqslant e^x$.

6 Dérivation et fonctions dérivées

Prérequis

- Connaître la dérivée des fonctions de références, en particulier celles définies par $mx+p$, x^n, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et e^x.
- Connaître les formules de dérivation d'un produit, d'un quotient.
- Connaître la formule de dérivation d'une fonction composée définie par $g(x) = f(mx+p)$.
- Connaître le calcul littéral et en particulier la factorisation.
- Enfin, toujours garder en tête que l'on calcule une fonction dérivée pour obtenir son signe ainsi que ses racines. Il faudra donc le plus souvent chercher à factoriser le résultat.
  Dans un calcul de dérivation, on ne développe qu'à une seule condition : La factorisation n'est pas possible !

Outils

f est une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
Pour tout $a \in \mathscr{D}_f$

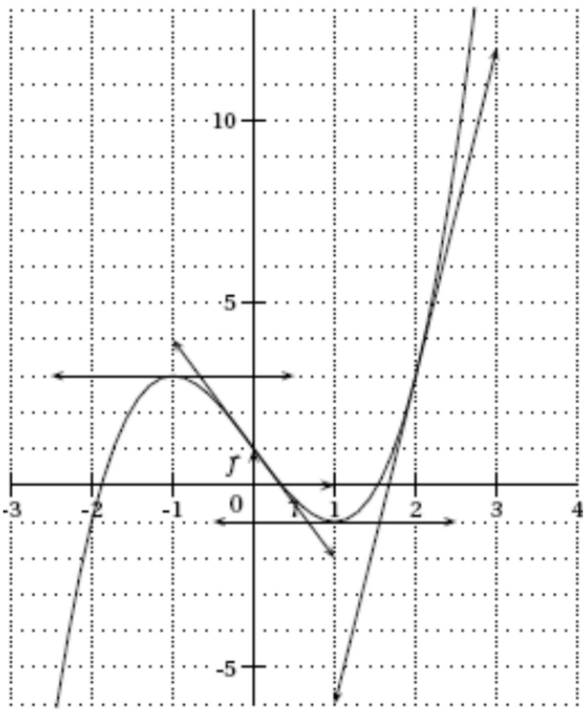
- f est dérivable en a si et seulement si la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, quand h tend vers 0, est un réel.
- Ce réel est appelé nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.
  On a donc $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangene à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Exercice n° 20

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est-elle dérivable en 2 ?
2. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice n° 21

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans unn repère orthogonal.



1. Déterminer graphiquement :
   a. $f(0)$; $f(-1)$ et $f(2)$.
   b. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisse 0, -1 et 2.
   c. L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1.
   d. L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1;26)$.
   Déterminer par le calcul une équation de T.

Exercice nº 22

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur [-3 ;0] ;
- $f(0) = -2$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est horizontale ;
- $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;
- $f(3) = 9$.

Exercice nº 23

Pour chacune des fonctions suivantes, donner s'il existe le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

1. $f(x) = -x^2$, pour $a = 2$.

2. $f(x) = 2x - 7$, pout tout a dans $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pour $a = 1$.

Outils - Dérivées des fonctions usuelles

fonction f définie par :	Ensemble de définition $\mathscr{D}_f$	fonction dérivée f' définie par	Ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}_{f'}$
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Outils - Opérations sur les dérivées

u et v sont des fonctions dérivables :

- ☛ **Somme de fonctions** : $(u+v)' = u' + v'$
- ☛ **Produit de fonctions** : $(u \times v)' = u'v + uv'$
- ☛ **Quotient de fonctions** : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- ☛ **Composée de u et d'une fonction affine** : Si $g(x) = u(ax+b)$ alors $g'(x) = a \times u'(ax+b)$

Exercice n° 24

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 7$;
2. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}$;
3. $f(x) = x^2 e^x$;
4. $f(x) = xe^{-x}$;
5. $f(x) = e^{3x+7}$.

7 Etude de fonctions

Prérequis

- ✏ Etre capable de déterminer la dérivée d'une fonction ainsi que son signe.
- ✏ Etre capable de déterminer l'équation réduite d'une tangente en un point.
- ✏ Connaître le calcul littéral et en particulier la factorisation.

Outils

Théorème des variations Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- ☛ f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- ☛ f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- ☛ f est constante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exercice n° 25

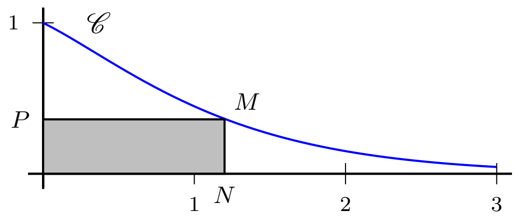
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 30$.
Dresser le tableau de variation de f.

Exercice n° 26

D'après un exercice du *Livre scolaire*

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau.

Le panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 3 mètres sur 1 mètre.
Il est modélisé ci-contre dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et l'unité choisie est le mètre.



La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;3]$ par $f(x) = (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}$.
M est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
N et P sont les projetés orthogonaux du point M sur les axes du repère.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P.
2. Justifier, que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;3]$, l'aire du rectangle $ONMP$ est donnée par $\mathscr{A}(x) = (x^2 + x)e^{-\frac{3}{2}x}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.
4. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale.

Exercice n° 27

Partie A

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

2. Étudier le signe de $P(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal (en abscisse 1cm pour 1 unité et en ordonnée 1cm pour 2 unités).

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

2. Dresser son tableau de variations.

3. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère préciser ci-dessus.

4. Pour quelles abscisses x_0 les tangentes au point d'abscisse x_0 sont-elles horizontales ?

5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en $x = 3$ et la tracer dans le même repère que $\mathscr{C}$.

6. Déterminer le réel d tels que $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{d}{x-2}$.

7. On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et P sa courbe représentative.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de P.

8 Suites

Prérequis

- Sens de variation d'une suite.
- Suites arithmétiques, suies géométriques.
- Somme des termes.
- Algorithme.

Exercice n° 28

On considère les 4 algoritmes ci-dessous.

Pour n allant de 0 à 5 faire $u \leftarrow 2^*n - 1$ Afficher u Fin pour	$u \leftarrow 2$ Pour n allant de 1 à 5 faire $u \leftarrow 2^*u - 1$ Afficher u Fin pour	$n \leftarrow 0$ $u \leftarrow 2$ Tant que $u < 20$ faire $n \leftarrow n + 1$ $u \leftarrow 3^*u - 5$ Fin Tant que Afficher u	$n \leftarrow 0$ $u \leftarrow 3$ Tant que $u < 20$ faire $n \leftarrow n + 1$ $u \leftarrow 3^*u - 5$ Fin Tant que Afficher u

1. Combien de valeurs sont affichés par chacun de ces 4 algorithmes ?

2. Faire tourner, à la main, ces 4 algorithmes.

3. Donner en une phrase ce que fait chacun de ces algorithmes.

4. Dire s'il s'agit de suites définies par une formule explicite ou par une relation de récurrence.

Outils - Suites arithmétiques

- Une suite est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
  r est la raison de la suite.
- Pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$;
- Somme des $n+1$ premiers entiers naturels : $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice n° 29

On considère une suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{12}.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{12} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$.

Outils - Suites arithmétiques

- Une suite est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
  q est la raison de la suite.
- Pour tout n, on a $u_n = u_0 \times q^n$;
- Somme des $n+1$ premieres puissances de q réel différent de 1 :
  $1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice n° 30

On considère une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_9.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice n° 31

Un globe-trotter a décidé de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1% tous les jours. On note d_n la distance parcourue durant le n-ième jour ainsi $d_1 = 50$km.

1. Calculer les distances d_2 et d_3.
2. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. En déduire la nature de la suite (d_n).
3. Exprimer d_n en fonction de n.
4. On note $L_n = d_1 + \cdots + d_n$, ainsi L_n est la distance totale parcourue en n jours.
   Exprimer L_n en fonction de n.
5. Conjecturer la limite de (L_n) quand n tend vers $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner son pari ?

Exercice n° 32

D'après Manuel *Techmaths Editions Nathan 2019*

Partie A

En 2019 le stock de cabillaud au large des côte d'un littoral était estimé à 5 000 tonnes.
En raison de la surpêche, ce littoral a vu le stock de cabillaud diminuer sensiblement aux abords des côtes.
Les autorités locales souhaitent réglementer la pêche de cabillaud pour éviter sa disparition totale du littoral.
Elle décident donc de limiter la pêche pour cette espèce.
On suppose que, hors pêche, le stock reste constant à 5 000 tonnes.
En 2019, le quota de cabillaud pouvant être pêché sur ces côtes est fixé à 600 tonnes.
Les autorités locales décident de baisser chaque année le quota de pêche de cabillaud de 30 tonnes.

1. Calculer le quota de cabillaud, en tonnes, pouvant être pêché en 2020 puis en 2021.
2. De façon général, on note u_n le quota de cabillaud, en tonnes, pouvant être pêché l'année 2019+n.
   Préciser la valeur de u_0 et de u_1.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

4. Calculer u_{10}. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le tableau suivant est extrait d'une feuille de calculs.

	A	B	C
1	n	Quota annuel (en tonnes) : u_n	Quantité totale de cabillaud pêchée depuis 2019 (en tonnes)
2	0	600	600
3	1	570	1 170
4	2	540	1 710
5	3	510	2 220
6	4	480	2 700
7	5	450	3 150
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

a. Quelle formule, destinée à être étirée vers le bas, faut-il saisir en B3 afin d'obtenir les termes de la suite (u_n) ?

b. Quelle formule faut-il saisir en C3, afin d'obtenir, par étirement vers le bas, la quantité totale de cabillaud pêchée depuis 2019 ?

c. Recopier et compléter le tableau, à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.

d. Quelle est la quantité totale de cabillaud, en tonnes, pêchée entre 2019 et 2029 ?

e. La réglementation adoptée permet-elle d'éviter à long terme la disparition du cabillaud des côtes ? Justifier.

Partie B

Une étude montre que le modèle précédent n'est pas valide.
En fait, en l'absence de pêche, le stock de cabillaud augmente de 12% chaque année.
On fixe alors le quota de pêche de cabillaud à 500 tonnes par an.
Soit v_n le stock de cabillaud, en tonnes, pour l'année $2019+n$, avant que ne démarre la saison de la pêche.
On a donc $v_0 = 5\ 000$.

1. Démontrer que $v_1 = 5\ 100$ et que $v_2 = 5\ 212$.

2. Calculer v_3.

3. Ecrire une formule de récurrence permettant de calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Saisir n
v ← 5 000
Pour i allant de 1 à n
    v ← 1,12 * v − 500
Fin Pour
Afficher v
```

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de v obtenues à l'aide de l'algorithme, arrondies à l'unité, lorsque l'utilisateur saisit une valeur de n comprise entre 4 et 7.

Valeur de n	4	5	6	7
Valeur de v	5 478	5 635	5 812	6 009

a. Donner la valeur affichée par l'algorithme, arrondies à l'unité, lorsque l'utilisateur saisit la valeur $n = 9$.

b. Interpréter, dans le contexte étudié, la valeur affichée par l'algorithme pour $n = 9$.

Exercice n° 33

✷ Pour améliorer vos vacances, je vous propose de vous donner 2500 euros par jour pendant 14 jours. En contrepartie, je demande peu de choses :

- le 1$^{\text{er}}$ jour, vous me donnez 3 centimes ;
- le 2$^{\text{ième}}$ jour, vous me donnez 9 centimes ;
- Le 3$^{\text{ième}}$ jour, vous me donnez 27 centimes ;
- ...et vous triplez chaque jour la somme du jour qui précède et cela pendant 14 jours.

Etes-vous assez fou pour refuser mon offre ?
Justifier la réponse.

Probabilités

Prérequis

- ✏ Probabilités conditionnelles.
- ✏ Variables aléatoires, espérance et écart-type.

Exercice n° 34

D'après un exercice du manuel *Declic* éditions Bordas 2019

On donne la répartition des élèves d'un lycée.

	Seconde (S)	Première (P)	Terminale (T)
Filles (F)	190	220	190
Garçons (G)	210	200	170

On choisit un élève au hasard.
Calculer la probabilité des événements suivants :

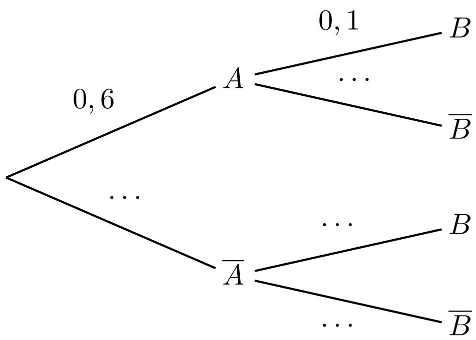
- L'élève choisi est un élève de seconde.
- L'élève choisi est une fille de première.
- L'élève choisi est une fille sacahant que c'est un élève de seconde.
- L'élève choisi est un élève de terminale sachant que c'est un garçon.

Exercice n° 35

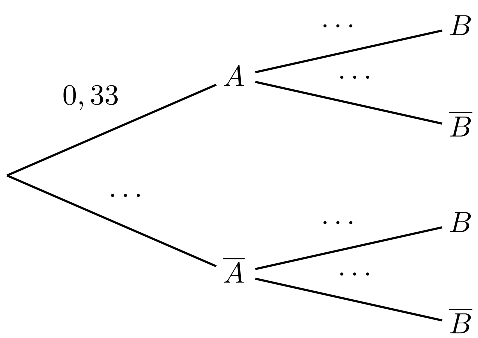
D'après un exercice du manuel *Declic* éditions Bordas 2019

Recopier et compléter les arbres pondérés à l'aide des renseignements fournis.

1. $P(B) = 0,22$



2. $P\left(\overline{B}\right) = 0,8061$ et $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,1675$



Exercice n° 36

D'après un exercice du manuel *Indice* éditions Bordas 2019

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné dans des paquets portant le lable « Extra-fin ».
On admet que 3% du sucre provenant de l'exploitation U et 5% de l'exploitation V est extra fin.
On prélève au hasard un paquet de sucre de la production de l'entreprise et, dans un soucis de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.
On considère les évènements suivants :

- U : « le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « le paquet porte le label « Extra-fin » ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30% de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation V.

a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « Extra-fin » ?

b. Sachant qu'un paquet porte le label « Extra-fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que, parmi les paquets portant le label « Extra-fin », 30% d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?